Modelovanje širenja bolesti

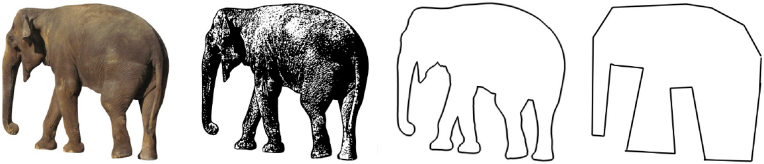
Vuk Vuković

Matematička gimnazija
Nedelja$^4_{\text{informatike}}$

26. mart 2018.

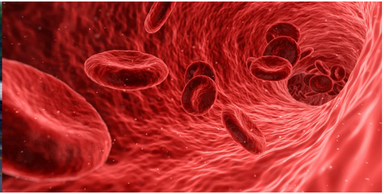
Modelovanje

- Šta predstavlja modelovanje?
- Uprošćeni, približan opis sistema iz prirode
- Nivo detaljnosti i tačnosti opisa?
- Teorijske osnove, eksperimentalna saznanja i iskustvo inženjera
- Everything should be made as simple as possible, but not simpler. *Albert Ajnštajn*



Alat za rešavanje

- Opisivanje dinamike sistema (promena parametara sistema u vremenu)
- Diferencijalne jednačine
- Analitičko i numeričko rešavanje
- Fenomenološka preslikavanja
- Protok saobraćaja - kretanje krvnih zrnaca kroz kapilare, ekonomski modeli tržišta - prigušene i prinudne oscilacije

Modeli epidemije

- Razumevanje prenosa i širenja bolesti u populaciji
- Alat za analizu i testiranje scenarija kod predstojećih epidemija ili bioterorizma
- Procena razmera i organizacija kontrolnih intervenija (formiranje optimalnog programa vakcinacije)

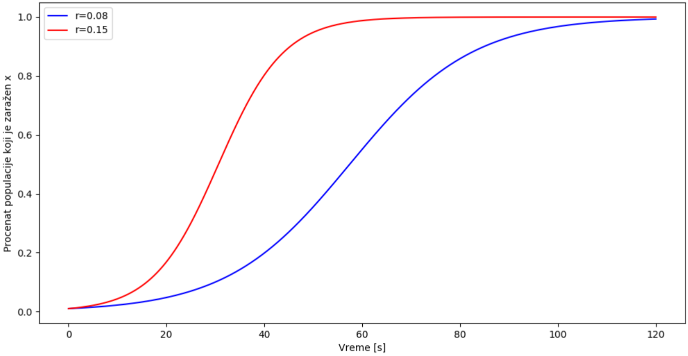
Prvi pokušaj

- Neka je x procenata populacije zaraženo
- Tada je $(1-x)$ procenata populacije zdravo
- Svi članovi populacije se mogu slobodno kretati i susretati
- Pretpostavka:
  Brzina porasta zaraze srazmerna je sa x i $(1-x)$

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x)$$

Prvi pokušaj

- Posle dovoljno vremena, čitava populacija će biti zaražena
- Srećom, ovaj model je previše pojednostavljen i ne uzima u obzir mogućnost da neki od obolelih ozdrave, budu izolovani ili vakcinisani



Modeli epidemije

- Matematički modeli koji pre svega opisuju **transmisiju (prenos)** bolesti
- Slični modeli se mogu iskoristiti za opisivanje prenosa informacija, glasina, finansijke krize
- Procena razmera i organizacija kontrolnih intervencija (formiranje optimalnog programa vakcinacije)

SIR model

- Jednostavan, ali donekle primenljiv model
- Populacija je podeljena u tri kategorije:
  - Podložni (**S**usceptible)
  - Zaraženi (**I**nfected)
  - Oporovaljeni (**R**ecovered)
- Oporavljeni uključuju osobe koje su izlečene, imunizovane ili mrtve
- Posmatra se broj pojedinaca u svakoj grupi u zavisnosti od vremena i važi sledeća relacija.

$$S(t) + I(t) + R(t) = N$$

Formiranje jednačina

- Broj pojedinaca u grupi podložnih (S) se ne povećava
  - Nova rođenja
  - Migracije
  - Oporavljene osobe su imune i ne mogu se ponovo zaraziti
- Zatvorena populacija tokom trajanja epidemije
- Jedini način da pojedinac napusti grupu podložnih (S) je da postane zaražen (I)
- Neka svaki zaraženi pojedinac ima k interakcija u toku nedelje koje su dovoljne za prenos bolesti

Formiranje jednačina

- Pretpostavimo da su interakcije između ljudi homogene
- Prilikom $k\frac{S(t)}{N}$ interakcija dolazi do prenosa bolesti s obzirom da se radi o kontaktu sa podložnom osobom
- Finalno, kako je broj zaraženih osoba $I(t)$ važi:

$$\frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t)$$

$$\frac{dS(t)}{dt} = -aS(t)I(t)$$

$$a = \frac{k}{N}$$

Formiranje jednačina

- Neka svake nedelje b procenata osoba ozdravi ili umre
- Na primer, ukoliko bolest traje 3 dana, u proseku će svakog dana ozdraviti $\frac{1}{3}$ zaraženih

$$\frac{dR(t)}{dt} = bI(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t) - bI(t)$$

- Primetimo

$$\frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} = 0$$

Pregled SIR

$$\frac{dS(t)}{dt} = -aS(t)I(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t) - bI(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = bI(t)$$

Osnovni reprodukcioni broj

- Prosečan broj sekundarnih infekcija koje izazove zaražena jedinka tokom svog infektivnog perioda
- Predstavlja prag koji određuje kako će se bolest razvijati
  - $R_0 = 1$ endemija
  - $R_0 < 1$ bolest nestaje
  - $R_0 > 1$ epidemija
- Primeri vrednosti poznatih virusa:
  - EBOLA virus $R_0 = 1,5 - 2,5$
  - Polio virus $R_0 = 5 - 7$
  - Virus rubeola $R_0 = 12 - 18$

Analogija u SIR modelu

- $\frac{dI}{dt} > 0$, broj zaraženih jedinki će kontinualno rasti i bolest će se ubrzano širiti unutar populacije (epidemija)
- $\frac{dI}{dt} < 0$, broj zaraženih jedinki će kontinualno opadati i bolest će nestati
- $\frac{dI}{dt} = 0$, broj zaraženih jedinki će ostati konstantan u vremenu i lokalizovan unutar populacije (endemija)

Analogija u SIR modelu

- Cilj je sprečiti širenje bolesti što u SIR modelu možemo predstaviti na sledeći način:

$$\frac{dI}{dt} = aSI - bI < 0$$

$$\frac{aS}{b} < 1$$

Na početku, broj podložnih osoba jednak je broju ljudi u populaciji ($S = N$)

$$R_0 = \frac{aN}{b}$$

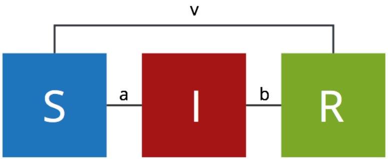
Imunizacija (SIRV)

- Ako se određen broj jedinki v imunizuje na nedeljnoj bazi tokom perioda epidemije, sistem jednačina kompartmana je:

$$\frac{dS(t)}{dt} = -aS(t)I(t) - v$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t) - bI(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = bI(t) + v$$



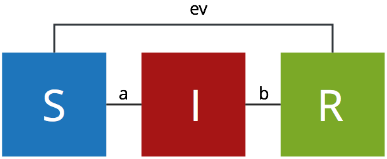
Efikasnost imunizacije (SIRVE)

- Vakcinacija ne obezbeđuje perfektan imunitet, već ima konačnu efikasnost e koja zavisi od pola, starosti, genetske predispozicije

$$\frac{dS(t)}{dt} = -aS(t)I(t) - ev$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t) - bI(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = bI(t) + ev$$



Opadanje imuniteta (SIRS)

- Ovaj model pored SIR modela uzima u obzir problem opadanja imuniteta jedinki usled npr. mutacije virusa

$$\frac{dS(t)}{dt} = -aS(t)I(t) + \gamma R(t)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = aS(t)I(t) - bI(t)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = bI(t) - \gamma R(t)$$